

Zajęcia D-4: "Grafy skierowane i sortowanie topologiczne"

Cel zajęć i efekty uczenia

Główne cele zajęć / materiał do opanowania:

- Pojęcia grafu skierowanego, cyklu
- Kolejność topologiczna i sortowanie topologiczne

Dodatkowe cele:

- Podział krawędzi w algorytmie DFS: drzewowe/wsteczne/poprzeczne/wyprzedzające

Zadania do rozwiązania na sprawdzarce

Komisja śledcza

Dany jest graf skierowany. Posortować go topologicznie lub stwierdzić, że ma cykl.

Plan zajęć

Szacunkowy czas trwania: 2 godziny lekcyjne.

1. Grafy skierowane, pojęcie cyklu skierowanego
2. Algorytm DFS dokładniej: kolory wierzchołków, rodzaje krawędzi
 - *Algorytm DFS koloruje wierzchołki na białą (jeszcze nieodwiedzone), szarą (DFS się zaczął, ale nie skończyły się jeszcze wszystkie wywołania rekurencyjne) lub czarną (DFS się skończył).*
 - *Krawędź $u \rightarrow v$ jest wsteczna, jeśli w momencie, kiedy przeglądamy wierzchołek u , wierzchołek v jest szary. Krawędź wsteczna zawsze domyka cykl w grafie. Możemy więc stosunkowo łatwo zrobić algorytm, który wykrywa cykl - modyfikujemy DFS-a tak, aby patrzył na kolor końca przeglądanej krawędzi. Białą oznacza wywołanie rekurencyjne, czarny jest ignorowany, szary oznacza krawędź wsteczną, a więc cykl.*
3. Acykliczny graf skierowany (DAG), pojęcie kolejności topologicznej
 - *Tutaj konieczne jest dłuższe zatrzymanie się i narysowanie kilku przykładów na tablicy.*
 - *Trzeba uczulić uczniów na to, że kolejność topologiczna może być więcej niż jedna - a wręcz może ich być bardzo dużo. Warto zrobić też kilka przykładów z pytaniem uczniów "czy zadana kolejność jest topologiczna", albo "znajdź wszystkie możliwe porządki topologiczne".*
4. Znajdowanie kolejności topologicznej za pomocą DFS-a
 - *Standardowy algorytm: "wypisz wierzchołki na końcu DFS-a" ustawia wierzchołki w odwrotnej kolejności topologicznej. Sam algorytm jest więc niezwykle prosty.*
 - *Warto opowiedzieć szkic dowodu poprawności: w znalezionej kolejności nie może być wystąpić najpierw wierzchołek u , a potem v taki, że $u \leftarrow v$. Wtedy bowiem nie moglibyśmy zakończyć DFS(v) nie kończąc wcześniej DFS(u).*

5. [opcjonalnie] Znajdowanie kolejności topologicznej metodą “obgryzania”
- Dla każdego wierzchołka v tworzymy zmienną licznik[v], która zlicza, ile krawędzi do niego wchodzi.
 - Jeśli w grafie jest wierzchołek z licznik[v] = 0, to zawsze może być pierwszy w kolejności topologicznej. Wypisujemy v i usuwamy go z grafu, zmniejszając licznik wszystkim jego sąsiadom.
 - Powtarzamy procedurę dla wierzchołków, dla których licznik spadł do 0. Aby złożoność pozostała liniowa, używamy kolejki, na którą trafiają wszystkie wierzchołki, których licznik się wyzerował.
 - Warto przedstawić uczniom obie metody (DFS i obgryzanie) - obie są użyteczne!

