Algorytmy geometryczne

Opracowano na podstawie: "Algorytmy i Struktury Danych" - L.Banachowski, K.Diks, W.Rytter

Problem 1. Czy punkty P1 i P2 leżą po tej samej stronie odcinka AB

Niech p, q, r będą różnymi punktami:

p= (x,y), q=(x',y'), r=(x",y"),

natomiast det(p,q,r) wyznacznikiem macierzy

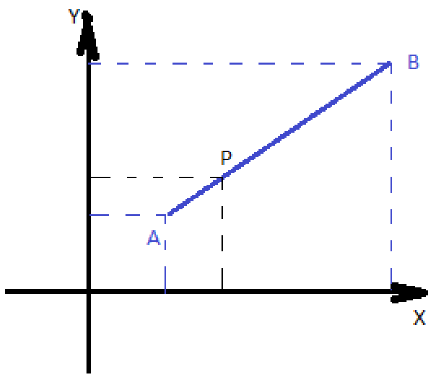
$$\begin{matrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x" & y" & 1 \end{matrix}$$

Znak det(p,q,r) jest równy znakowi sinusa kąta nachylenia wektora p→r do wektora p→q. Powiemy że:

- Jeśli det(p,q,r)>0, to punkt r leży po lewej stronie wektora p→q
- Jeśli det(p,q,r)<0, to punkt r leży po prawej stronie wektora p→q
- Jeśli det(p,q,r)=0, to punkt r jest współliniowy z p i q

Problem 2. Czy punkt P należy do odcinka AB

Jeśli punkt P należy do odcinka AB, to rzuty prostokątne P na osie OX i OY układu współrzędnych wpadają do rzutów prostokątnych odcinka AB.



Wynika stąd, że P należy do odcinka AB wtedy i tylko wtedy gdy zachodzą jednocześnie dwa warunki:

- xa<=xp<=xb oraz ya<=yp<=yb
- punkty A, B, P są współliniowe czyli det(A,B,P)=0

Problem 3. Czy odcinki AB i CD się przecinają

Odcinki AB i CD się przecinają gdy jest spełniony przynajmniej jeden z warunków:

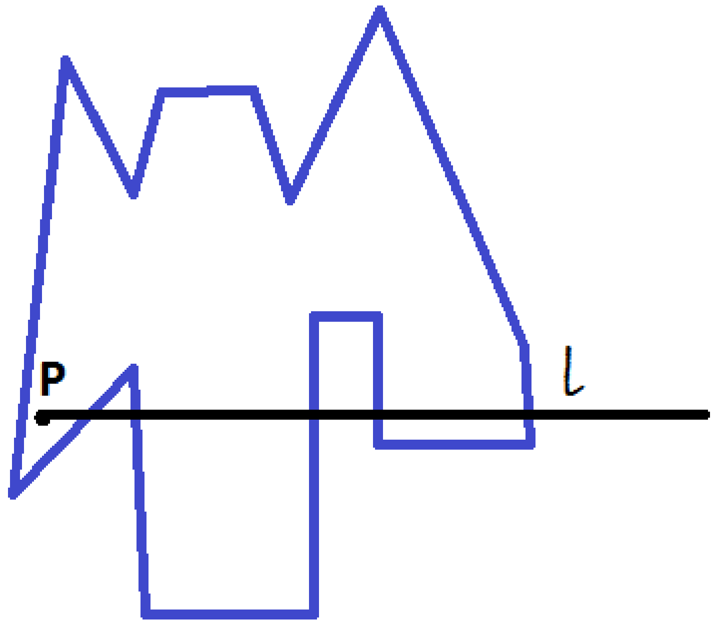
- gdy punkty A, B leżą po przeciwnych stronach odcinka CD oraz punkty C,D leżą po przeciwnych stronach odcinka AB
- punkt A lub B zawiera się w odcinku CD albo punkt C lub D zawiera się w odcinku AB.

Problem 4. Przynależność punktu P do trójkąta ABC

Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, wtedy i tylko wtedy gdy det(A,B,P), det(B,C,P) oraz det(C,A,P) mają ten sam znak.

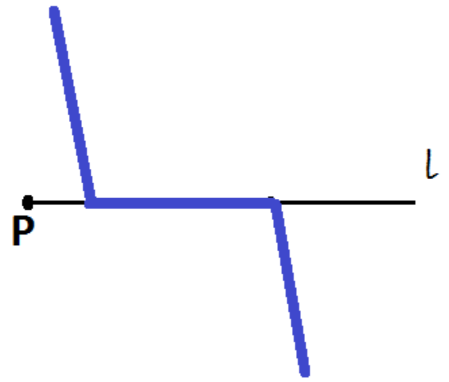
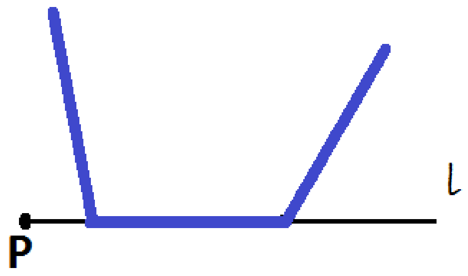
Problem 5. Przynależność punktu do wielokąta

Wielokąt jest reprezentowany przez zbiór punktów będących jego wierzchołkami.
By rozstrzygnąć problem przynależności punktu P do wielokąta wystarczy poprowadzić półprostą l o początku w P na przykład równoległą do osi OX i policzyć ile razy przecina ona boki wielokąta. Jeśli na półprostej l nie leży żaden z wierzchołków, to punkt P leży wewnątrz wielokąta wtedy i tylko wtedy gdy półprosta l przecina brzeg wielokąta nieparzystą liczbę razy.

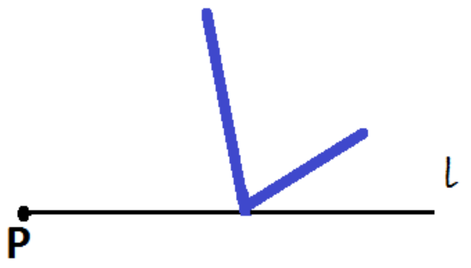
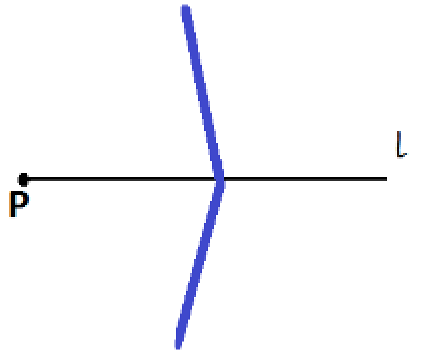


Niestety należy jeszcze uwzględnić dwa przypadki szczególne:

a. Półprosta zawiera bok wielokąta

	W takim wypadku do ilości przecięć doliczamy tylko jedno przecięcie.
	W takim wypadku do ilości przecięć nie doliczamy żadnego przecięcia.

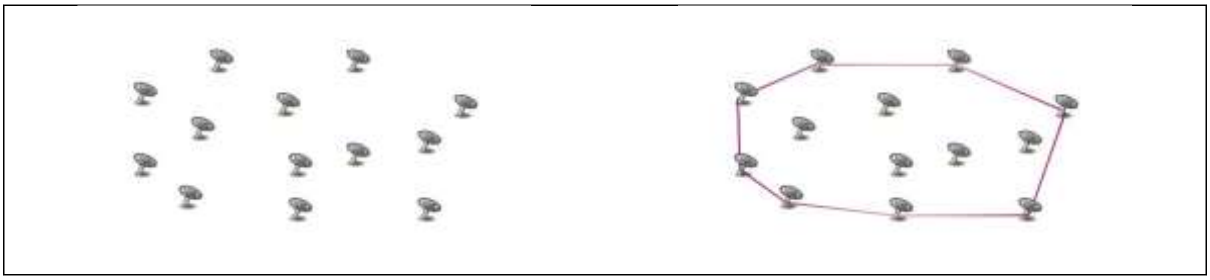
b. Półprosta przecina brzeg wielokąta w wierzchołku, nie zawierając żadnego z boków z nim sąsiadującego

	W takim wypadku do ilości przecięć nie doliczamy żadnego przecięcia.
	W takim wypadku do ilości przecięć doliczamy tylko jedno przecięcie.

Jeśli o wielokącie wiemy, że jest **wypukły** można użyć metody wyszukiwania binarnego, uzyskując złożoność logn, zamiast złożoności liniowej powyższego algorytmu.
Wierzchołki mamy podane w kolejności występowania ich na obwodzie zgodnej z ruchem wskazówek zegara w_0 w_1 w_2 … w_{n-1}. W czasie stałym można sprawdzić czy P leży wewnątrz trójkąta. Kiedy wielokąt ma więcej niż 3 wierzchołki prowadzimy przekątną z w_0 do $w_{(n-1)/2}$ i teraz mamy trzy możliwości:

- Punkt P znalazł się na tej przekątnej (więc należy do wielokąta)
- Punkt P leży po lewej od przekątnej. Należy teraz sprawdzić rekurencyjnie czy P leży wewnątrz wielokąta w_0 w_1 … $w_{(n-1)/2}$
- Punkt P leży po prawej od przekątnej. Należy teraz sprawdzić rekurencyjnie czy P leży wewnątrz wielokąta w_0 $w_{(n-1)/2}$ $w_{(n-1)/2+1}$ … w_{n-1}

Problem 6. Znalezienie wypukłej otoczki



Obraz pochodzi ze strony http://informatyka.wroc.pl

Otoczką wypukłą dowolnego niepustego skończonego zbioru punktów S nazywamy najmniejszy wielokąt wypukły zawierający S.

Algorytm Grahama:

Krok 1
Wybierz dowolny punkt wewnątrz otoczki (np.centroid). Umieść w nim środek układu współrzędnych i oblicz współrzędne wszystkich punktów wejściowych w nowym układzie współrzędnych
Krok 2
Uporządkuj punkty względem współrzędnych biegunowych (α_i,r_i) gdzie αi jest kątem nachylenia wektora wodzącego O→P_i do osi OX, a r_i jest jego długością.
Spośród punktów o najmniejszej współrzędnej y znajdź punkt o najmniejszej współrzędnej x.
Krok 3
Wyeliminuj punkty które nie należą do otoczki wypukłej. W tym celu bierz zawsze trzy kolejne punkty q_1 q_2 q_3 z bieżącej listy. Jeśli q_2 leży wewnątrz trójkąta (o, q_1,q_3) to usuń q_2 i przejdź do sprawdzania q_0 q_1 q_3. W przeciwnym razie kolejną badaną trójką będzie q_2 q_3 q_4