

# Rekurencja – przykłady z życia

- Jedzenie kaszki z talerza – A. Jerszow

Jedz kaszkę;

jeśli talerz jest pusty to koniec jedzenia  
w przeciwnym razie

weź łyżkę kaszki;

Jedz kaszkę

Warunek  
początkowy –  
zatrzymuje  
wywołania

Procedura rekurencyjna  
wywołuje siebie

- Tańiec

Tańcz;

jeśli nie gra muzyka to koniec tańczenia  
w przeciwnym razie

zrób krok;

Tańcz

## Rekurencja – wyprowadzanie kolejnych cyfr liczby

Liczbę 3045 drukuj w kolejności cyfr: 3 0 4 5

Algorytm – drukowania cyfr liczby 3045

1. Najpierw drukuj cyfry liczby 304

2. Później drukuj cyfrę 5

Liczba 304 to:  
 $3045 \text{ div } 10 = 304$

Cyfra 5 to reszta:  
 $3045 \text{ mod } 10 = 5$

Zauważmy: możemy  
zastosować ten sam  
algorytm ale do liczby 304  
– REKURENCJA

Potrzebne są dwie operacje:

reszta z dzielenia **mod**: np.  $3045 \text{ mod } 10 = 5$

dzielenie całkowite **div**: np.  $3045 \text{ div } 10 = 304$

# Rekurencja – wyprowadzanie kolejnych cyfr liczby

**KolejnaCyfra (m)**

if m < 10 then write (m)

Warunek początkowy –  
gdy liczba ma jedną cyfrę.

else begin

**KolejnaCyfra** (m div 10);

Wywołanie rekurencyjne dla  
liczby bez ostatniej cyfry

    write (m mod 10)

Drukowanie  
ostatniej cyfry

end

***Uwagi:***

1. Można zastąpić 10 przez 2 i otrzymamy kolejne cyfry binarne, od najbardziej znaczącej
2. Po zmianie kolejności poleceń – drukowanie cyfr od końca

# Rekurencja – wyprowadzanie kolejnych cyfr liczby

Wywołania rekurencyjne

KolejnaCyfra (3045)

$304 = 3045 \text{ div } 10$

KolejnaCyfra (304) write (3045 mod 10) = 5

KolejnaCyfra (30) write (304 mod 10) = 4

KolejnaCyfra (3) write (30 mod 10) = 0

write (3) = 3

Kolejno  
drukowane  
cyfry

Powrót z wywołań rekurencyjnych

## Rekurencja – inny przykład – Wieże Hanoi

Hanoi ( $n, A, B, C$ ) {z  $A$  na  $B$  za pomocą  $C$ }

if  $n = 0$  then nic nie rób

else begin

Hanoi ( $n - 1, A, C, B$ );

Największy krążek z  $A$  na  $B$ ;

Hanoi ( $n - 1, C, B, A$ )

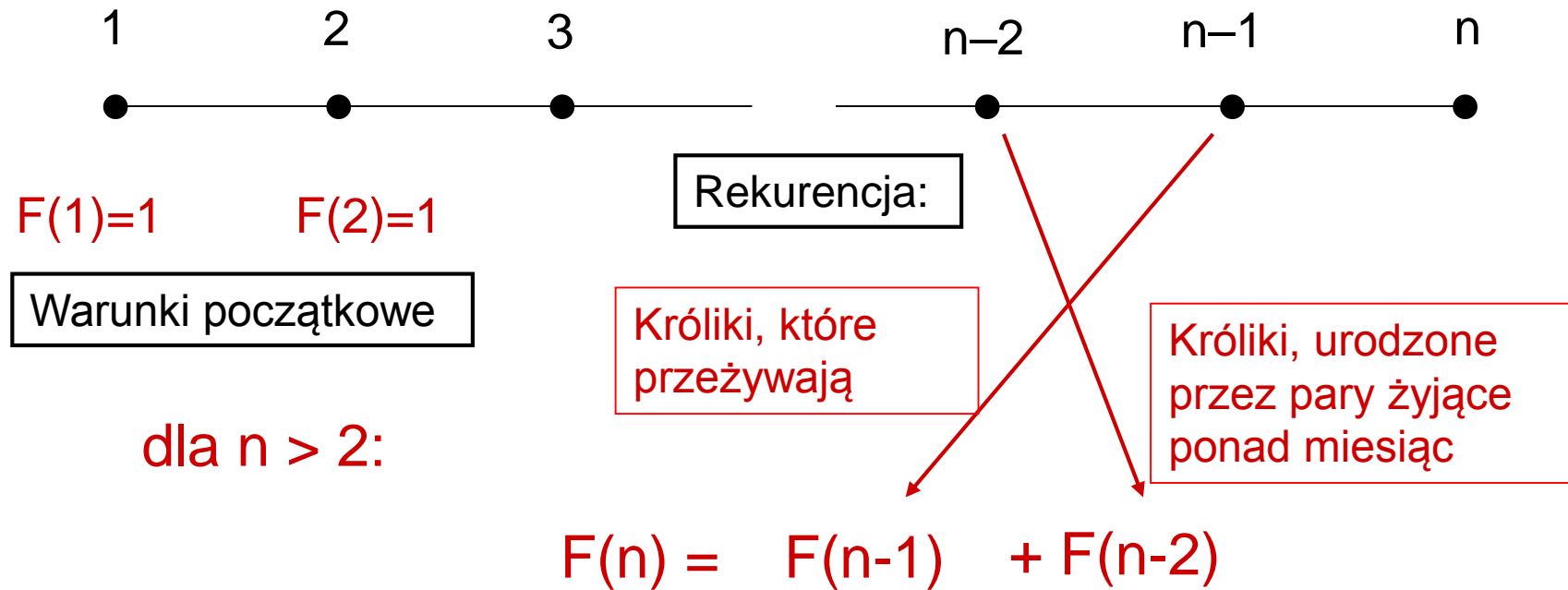
end

Warunek początkowy – zatrzymuje wywołania

Procedura rekurencyjna wywołuje siebie

# Rekurencja – inny przykład – króliki Fibonacciego

$F(n)$  – liczba par królików po  $n$  miesiącach



Liczby Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

## Rekurencja – inne przykłady

- Podnoszenie do potęgi

Potega (x, n)            {  $x^n$  }

if n = 1 then Potega := x

else if n – parzyste then

                 Potega := Potega (x, n/2)^2            {  $x^n = (x^{n/2})^2$  }

else Potega := Potega (x, n – 1)\*x            {  $x^n = (x^{n-1})x$  }

**Uwaga.** Obliczenia przebiegają tak, jakby n było liczbą binarną zapisaną w postaci schematu Hornera

- Algorytmy sortowania – demo w programie Sortowanie

Sortowanie przez scalanie

Sortowanie szybkie

## Rekurencja – inne przykłady


- Algorytm Euklidesa

NWD(m,n)                    {zakładamy  $m \leq n$ }

if  $m = 0$  then NWD := n

else NWD := NWD(n mod m, m)

Reszta z dzielenia  
n przez m.



- Wartość wielomianu stopnia n w punkcie x

w(n,x)

if  $n = 0$  then w :=  $a_0$

else w := w(n - 1, x) \* x +  $a_n$