

Szybkie potęgowanie

W naiwnym potęgowaniu by obliczyć wartość x^b musielibyśmy wykonać b mnożeń. Jednak liczbę tę można zredukować do $O(\log b)$

Przykład:

$$x^5 = x^4 * x$$

$$x^{11} = x^8 * x^2 * x$$

Pytanie: co decyduje o tym, które z czynników znajdują się w mnożeniu (dla danego wykładnika), a innych nie ma?

Odpowiedź: Rozwinięcie binarne wykładnika!

Zauważmy, że na przykład:

$$5 = (101)_2$$
$$x^5 = x^4 * x \text{ (nie ma } x^2, \text{ bo na drugim od prawej bicie jest 0)}$$

$$11 = (1011)_2$$
$$x^{11} = x^8 * x^2 * x \text{ (nie ma } x^4, \text{ bo na trzecim od prawej bicie jest 0)}$$

Zatem aby szybko podnieść liczbę x do potęgi o wykładniku naturalnym możemy postępować według poniższego schematu:

Zmienna w będzie przechowywała aktualny wynik. Na początek $w=1$.

Czynnik, który w mnożeniu się pojawi lub nie oznaczony zostaje przez c . Na początek $c=x$.

Zamieniamy wykładnik na system binarny i rozpatrujemy powstające bity w kolejności od najmniej znaczącego:

- Jeśli jest jeden to $w=w*c$, $c=c^2$
- Jeśli jest zero to jedynie $c=c^2$

Zauważmy, że przy zamianie wykładnika na system binarny nie musimy przechowywać w pamięci wszystkich bitów. Potrzebujemy tylko jeden bit w danym obiegu pętli, w kolejności takiej w jakiej powstają, czyli od najmniej znaczącego. Stąd nazwa algorytmu „od prawej do lewej”.

Wskazówki (wykorzystanie operatorów bitowych):

- $(b \& 1)$ jest równoważne zapisowi $(b \% 2 == 1)$ ale jest bardziej efektywne
- $b >> 1$ jest równoważne zapisowi: $b = b / 2$ ale jest bardziej efektywne